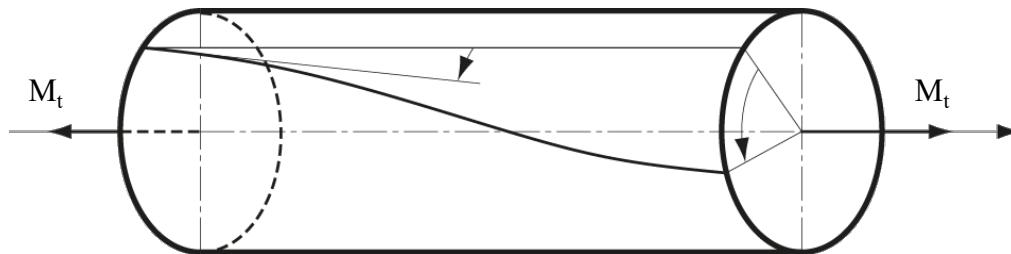


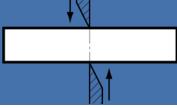
Mécanique des structures



Chapitre 5 : Torsion simple

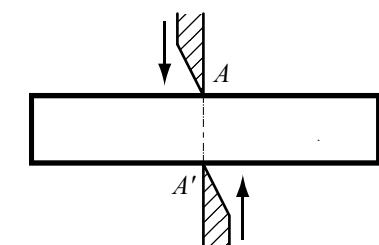
Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

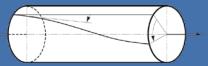
EPFL



Chapitre 4 : Cisaillement simple

Rappel





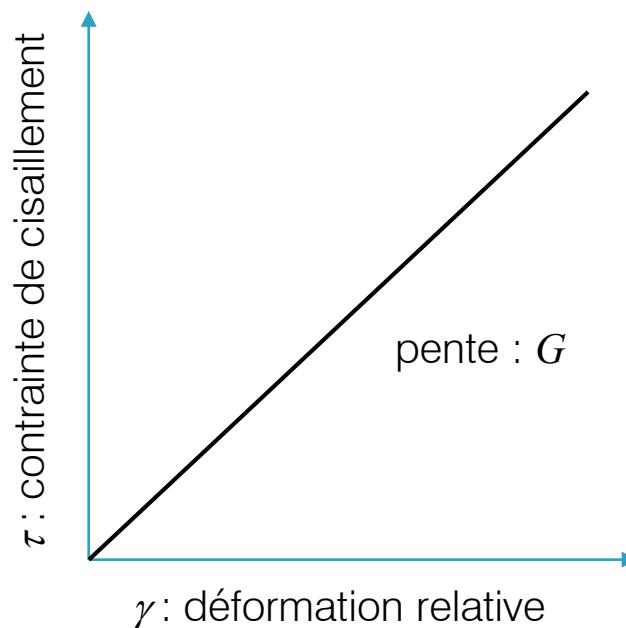
Chapitre 5 : Torsion simple

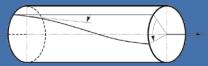
Introduction

La torsion ne cause **pas de tension ou compression** dans le matériau: elle génère des contraintes de cisaillement pures sur chaque plan de section transversal.

Le résultat de la contrainte de cisaillement en torsion sur n'importe quel plan de section transversale est un **couple interne**.

Les contraintes de cisaillement, τ , sont proportionnelles aux déformations relatives, γ , avec une constante de proportionnalité, G , le module de cisaillement





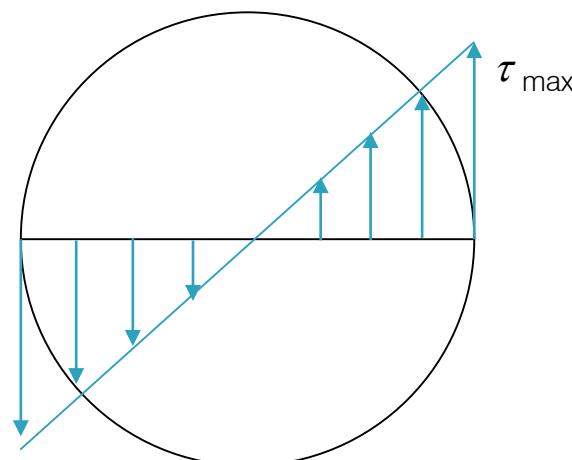
Chapitre 5 : Torsion simple

Introduction

Une section plane perpendiculaire à l'axe de torsion reste plane suite à l'application du couple (**pas de distorsion**)

Sur une section transversale, toutes les lignes radiales effectuent une rotation avec un angle égal lors de la déformation

La déformation relative de cisaillement $\gamma(r)$ et la contrainte de cisaillement $\tau(r)$ varient linéairement, de 0 à $r = 0$, de 0 à τ_{\max} , respectivement, sur le bord extérieur de la section





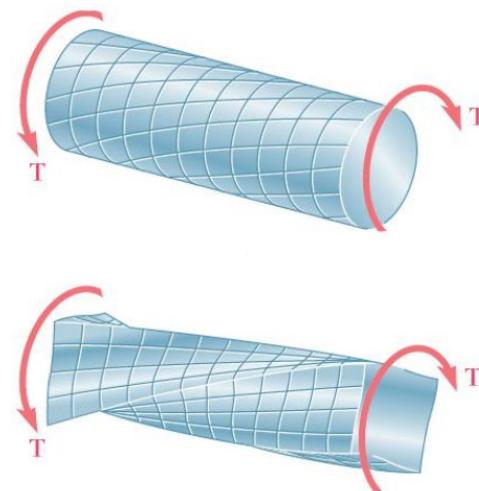
Chapitre 5 : Torsion simple

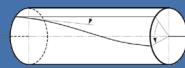
Introduction

Les **sections planaires restent planaires** en torsion seulement pour les corps avec une symétrie axiale infinie (comme les barres circulaires et les tubes).

Dans une barre avec une section carré / rectangulaire, il n'y a pas de telle symétrie et les sections transversales vont se déformer.

Il est faux d'assumer que la contrainte de cisaillement dans une barre rectangulaire varie linéairement avec la distance, la contrainte est en fait zéro dans les coins et non maximum.





Chapitre 5 : Torsion simple

Démarche et applications

(A) Introduction des notions générales et des hypothèses

(B) Identification des efforts non-nuls

(C) Expression des contraintes normale et tangentiel résultantes

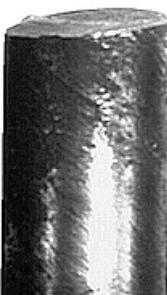
(D) Analyse de l'état de contrainte

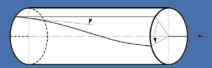
(E) Énergie de déformation (force & déplacement)



Tensile Failure in Torsion

Shear Failure in Torsion





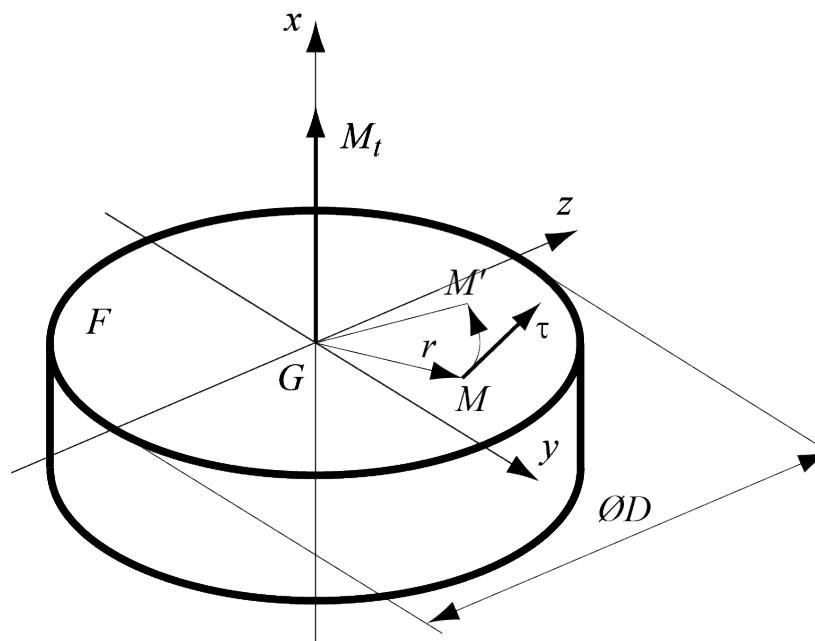
Chapitre 5 : Torsion simple

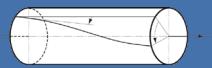
Contrainte de cisaillement en torsion simple

La section normale F d'un solide travaille à la *torsion simple* quand le torseur des efforts intérieurs se réduit au *moment de torsion* M_t , perpendiculaire à F .

Le calcul des contraintes et des déformations n'est facile que si la section est dites circulaire.

Pour des barres circulaires en torsion, l'expérience montre que l'on peut admettre qu'une section F' après déformation se déduit de la section originelle F par simple rotation dans le sens du moment de torsion M_t (*hypothèse de Bernoulli*)





Chapitre 5 : Torsion simple

Contrainte de cisaillement en torsion simple

En torsion, les équations d'équilibre sont toutes nulles, sauf la quatrième

$$(a) \quad N = \iint_F \sigma \, dF$$

$$(d) \quad M_t = \iint_F \tau_z y - \tau_y z \, dF$$

$$(b) \quad T_y = \iint_F \tau_y \, dF = 0$$

$$(e) \quad M_{fy} = \iint_F \sigma z \, dF = 0$$

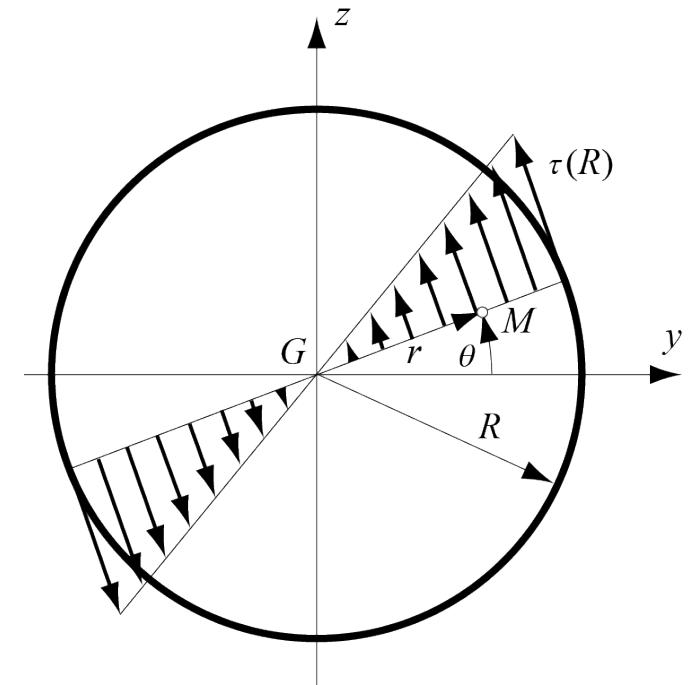
$$(c) \quad T_z = \iint_F \tau_z \, dF = 0$$

$$(f) \quad M_{fz} = - \iint_F \sigma y \, dF = 0$$

Comme la section F' reste dans le plan de F , la contrainte normale σ est nécessairement nulle en tout point, de sorte que les équations (a), (e) et (f) sont satisfaites

Un point M de F se déplace sur le cercle de rayon r passant par ce point; la contrainte tangentielle τ doit donc être proportionnelle à r et perpendiculaire à GM

- $\tau = k r$





Chapitre 5 : Torsion simple

Contrainte de cisaillement en torsion simple

L'introduction des coordonnées polaires (r, θ) permet d'écrire

- $y = r \cos \theta \rightarrow \tau_y = -\tau \sin \theta = -k r \sin \theta$
- $z = r \sin \theta \rightarrow \tau_z = \tau \cos \theta = k r \cos \theta$

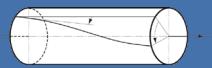
de sorte que les équations (b) et (c) ont pour expression, compte tenu de $dF = r dr d\theta$

- $T_y = -k \iint_F r \sin \theta dF = -k \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$
- $T_z = k \iint_F r \cos \theta dF = k \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$

Elles sont identiquement nulles quelle que soit la valeur k , la distribution des τ satisfaisant donc les conditions $T_y = 0$ et $T_z = 0$.

La relation (d) va nous permettre de calculer la constante k , puisqu'en y insérant les composantes τ_y et τ_z et en utilisant les coordonnées polaires

- $M_t = k \iint_F r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dF = k \iint_F r^2 dF = k I_p$



Chapitre 5 : Torsion simple

Contrainte de cisaillement en torsion simple

L'intégrale constitue le moment d'inertie polaire I_p de la section

- $I_p = \iint_F r^2 dF$

Ce qui permet de définir la constante k comme étant

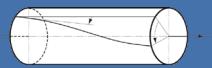
- $k = \frac{M_t}{I_p}$

Ce qui permet d'expliquer la contrainte τ sous la forme

- $\tau = k r = \frac{r M_t}{I_p}$

L'état de contrainte de la torsion circulaire est donc un *cisaillement pur*, mais la contrainte tangentielle τ varie en intensité et direction. Sa valeur maximale apparaît sur la surface extérieure du barreau

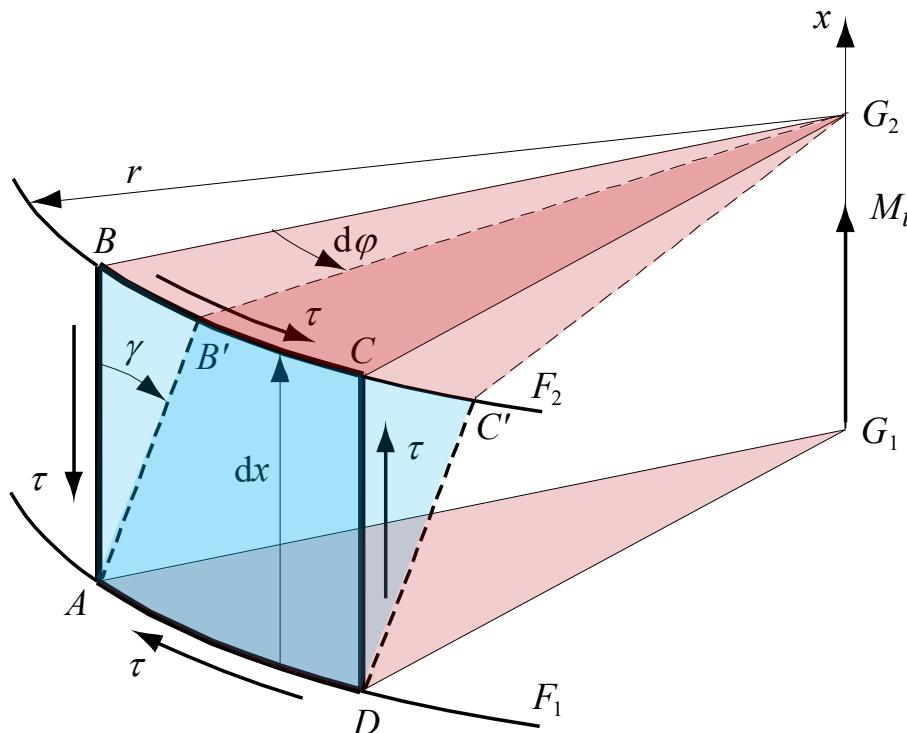
- $\tau_{max} = \tau(R) = \frac{R M_t}{I_p}$

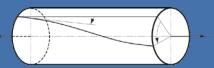


Chapitre 5 : Torsion simple

Déformation en torsion circulaire

Considérons un carré $ABCD$ compris entre deux sections voisines F_1 et F_2 , distantes de dx . La section F_1 étant supposée fixe, le carré se transforme en un losange $AB'C'D$, conformément aux résultats trouvés pour le cisaillement simple





Chapitre 5 : Torsion simple

Déformation en torsion circulaire

Nommons $d\varphi$ la rotation de F_2 par rapport à F_1 et γ l'*angle de glissement*.

L'arête BB' a pour valeur

- $BB' = \gamma dx = r d\varphi$

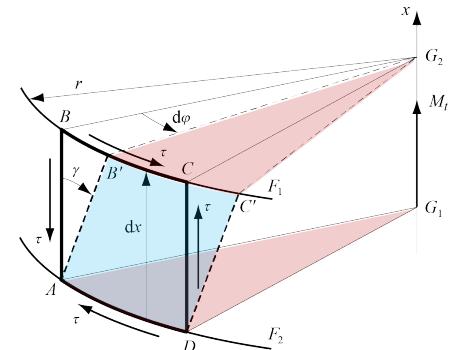
Où φ dénote la déformation angulaire, de sorte l'on peut écrire

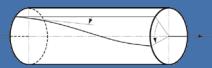
- $$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma}{r} = \frac{\tau}{r G} = \frac{M_t}{G I_p}$$
$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\tau = \frac{r M_t}{I_p}$$

Si le moment de torsion est constant sur une longueur ℓ , une génératrice AB du cylindre se transforme en une hélice AB' et l'intégration de la relation donne la déformation angulaire totale ou *angle de torsion*

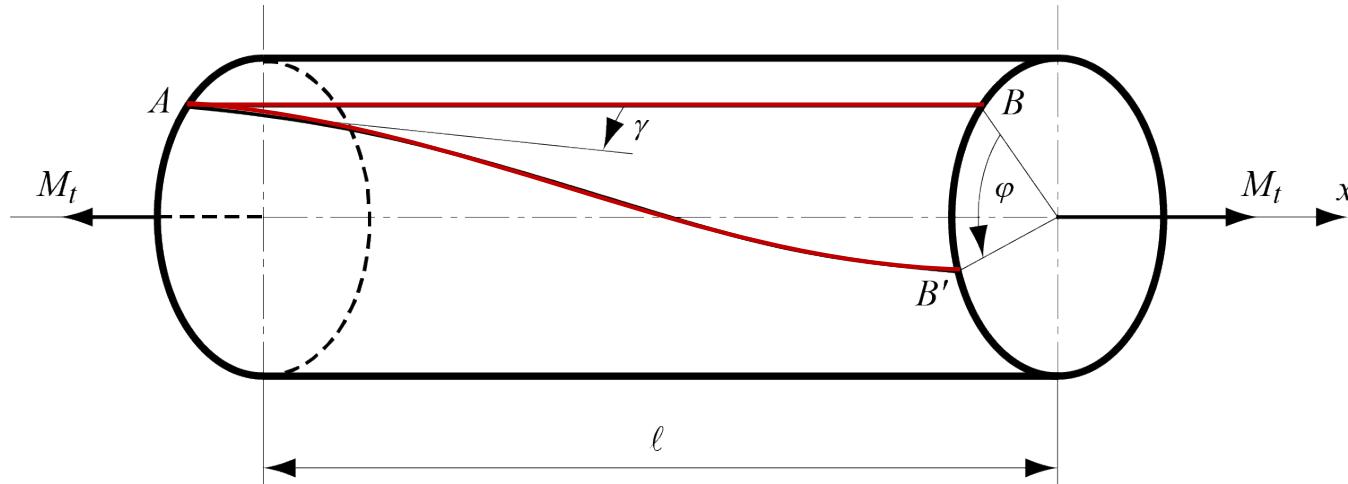
- $$\varphi = \frac{M_t \ell}{G I_p}$$





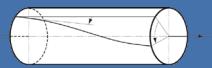
Chapitre 5 : Torsion simple

Déformation en torsion circulaire



Si le moment de torsion est constant sur une longueur ℓ , une génératrice AB du cylindre se transforme en une hélice AB' et l'intégration de la relation donne la déformation angulaire totale ou *angle de torsion*

- $$\varphi = \frac{M_t \ell}{G I_p}$$



Chapitre 5 : Torsion simple

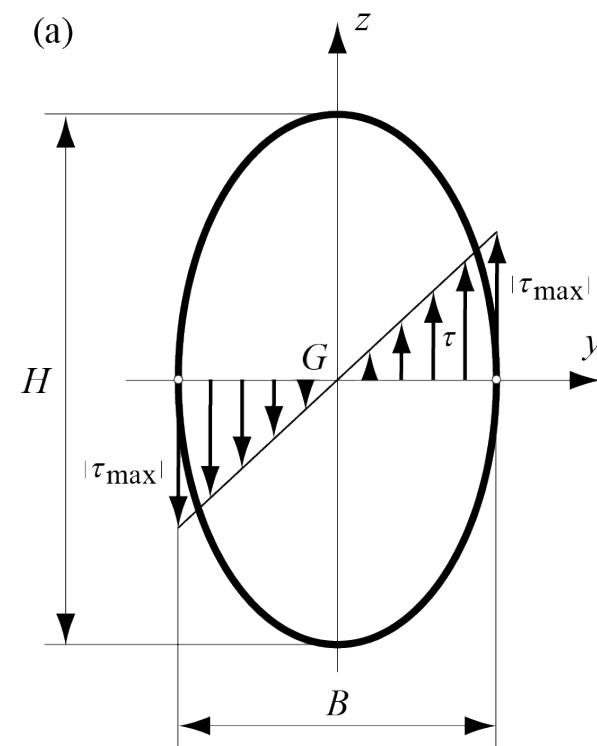
Déformation en torsion non circulaire

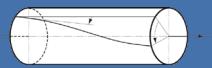
Alors que les sections des pièces circulaires soumises à la torsion restent planes, cette situation n'est plus vraie quand la section n'est pas circulaire.

Nous ne ferons pas de démonstrations rigoureuses dans le cadre de ce cours, mais nous contenterons de présenter quelques résultats intéressants qui découlent de méthodes plus générales de la théorie de l'élasticité.

Section elliptique

- $\tau_{max} = \frac{16M_t}{\pi(HB^2)}$
- $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{16M_t(H^2+B^2)}{\pi G (HB)^3}$





Chapitre 5 : Torsion simple

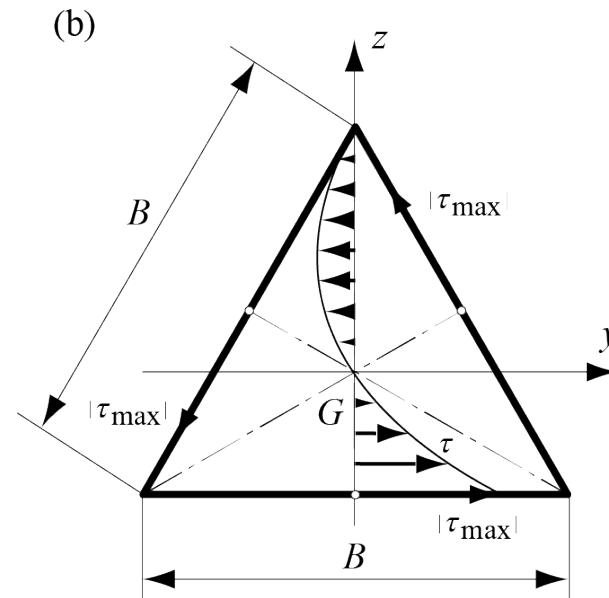
Déformation en torsion non circulaire

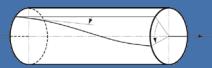
Alors que les sections des pièces circulaires soumises à la torsion restent planes, cette situation n'est plus vraie quand la section n'est pas circulaire.

Nous ne ferons pas de démonstrations rigoureuses dans le cadre de ce cours, mais nous contenterons de présenter quelques résultats intéressants qui découlent de méthodes plus générales de la théorie de l'élasticité.

Section triangulaire

- $\tau_{max} = \frac{20 M_t}{B^3}$
- $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{10 M_t}{6 G I_p}$



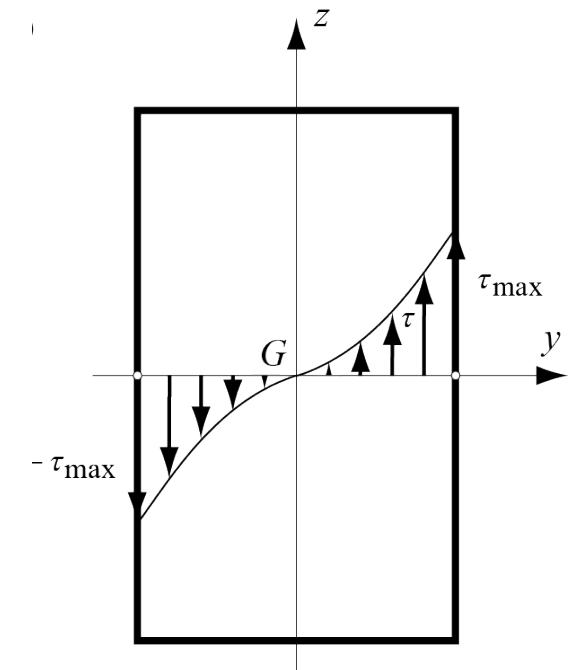
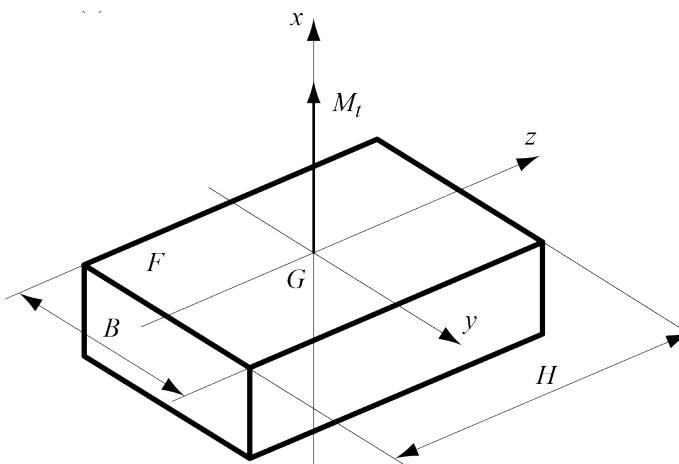


Chapitre 5 : Torsion simple

Déformation en torsion non circulaire

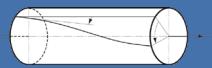
Section rectangulaire

- $\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha(HB^2)}$
- $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{\beta G(HB^3)}$



où G dénote à nouveau le module de glissement et où α et β constituent des coefficients qui sont fonctions du rapport H/B

Rapport H/B	1	1,5	2	3	4	6	10	∞
Facteur α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
Facteur β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333

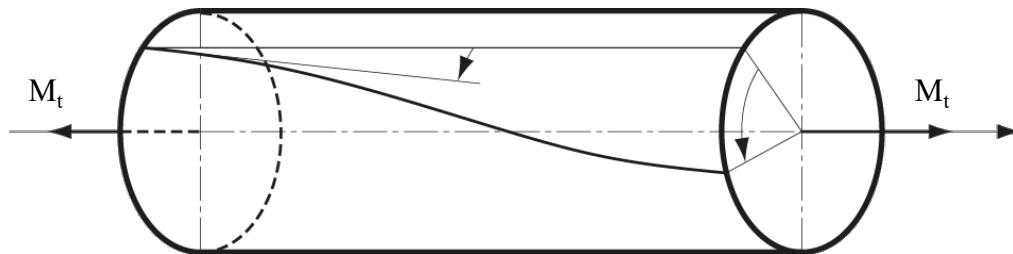


Chapitre 5 : Torsion simple

Problème 5.1

En choisissant une contrainte de cisaillement admissible τ_{adm} de 50 MPa, calculer le diamètre – supposé uniforme – d'un arbre de turbine à gaz transmettant une puissance de 25 MW à 8000 t/min

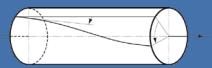
Mécanique des structures



Chapitre 5 : Torsion simple

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL

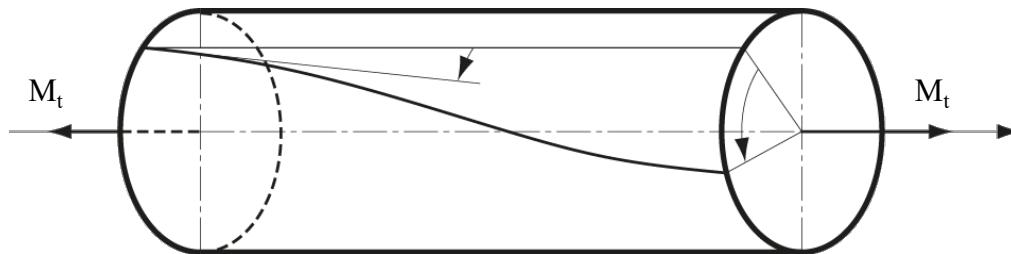


Chapitre 5 : Torsion simple

Problème 5.1

En choisissant une contrainte de cisaillement admissible τ_{adm} de 50 MPa, calculer le diamètre – supposé uniforme – d'un arbre de turbine à gaz transmettant une puissance de 25 MW à 8000 t/min

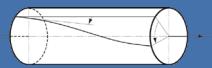
Mécanique des structures



Chapitre 5 : Torsion simple

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



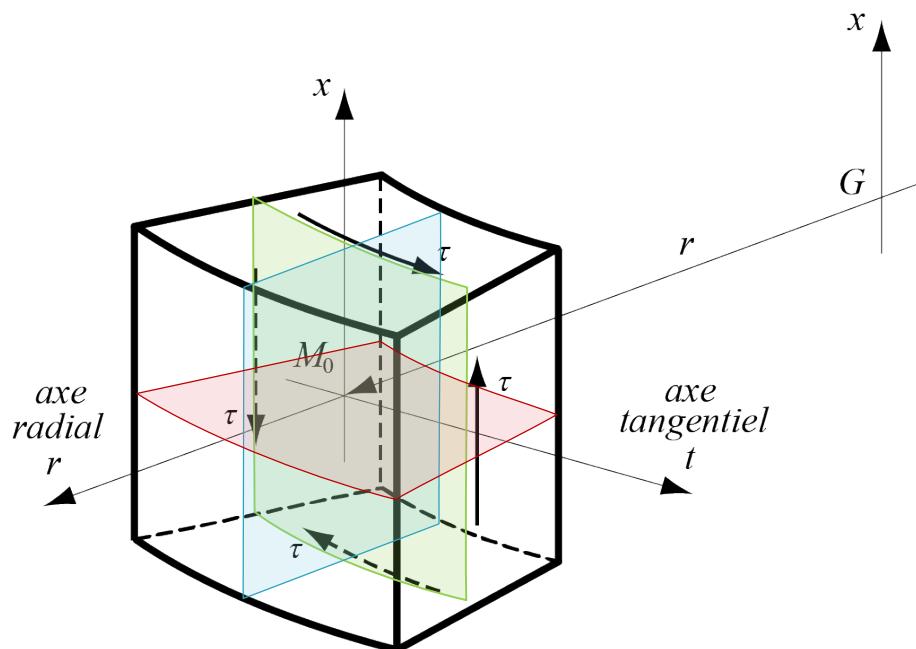
Chapitre 5 : Torsion simple

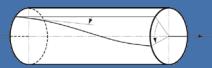
Analyse de l'état de contrainte en torsion circulaire

Afin de déterminer l'état de contrainte en torsion circulaire, considérons un élément infinitésimal autour d'un point M_0 , situé à une distance r de l'axe Gx .

Les contraintes normales sont nulles sur toutes les faces ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$) et la contrainte tangentielle est nulle sur les faces perpendiculaires à l'axe radial M_0r

Dès lors qu'une des contraintes principales est nulle, l'état de contrainte est bidimensionnel

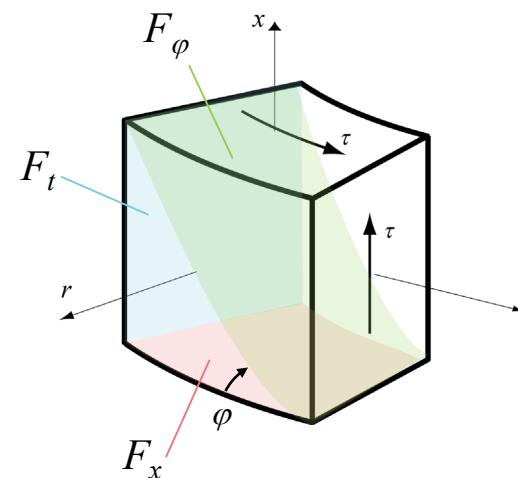
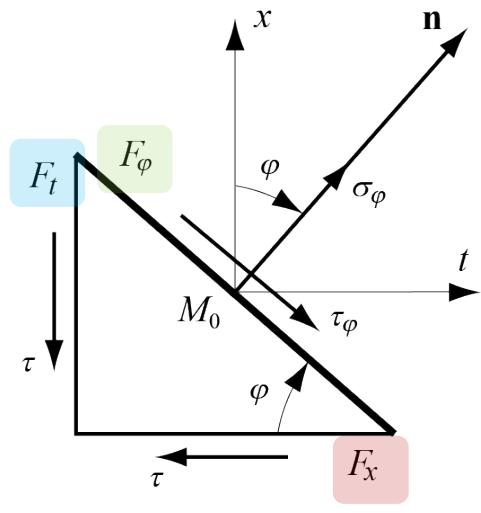




Chapitre 5 : Torsion simple

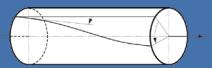
Analyse de l'état de contrainte en torsion circulaire

Choisissons à nouveau une section oblique F_φ , perpendiculaire au plan principal M_0xt et tournant autour de l'axe M_0r , sa normale \mathbf{n} formant un angle φ avec l'axe M_0x



L'équilibre des forces selon la normale \mathbf{n} et la direction perpendiculaire entraîne

- $F_\varphi \sigma_\varphi - F_x \tau \sin \varphi - F_t \tau \cos \varphi = 0$
- $F_\varphi \tau_\varphi - F_x \tau \cos \varphi + F_t \tau \sin \varphi = 0$



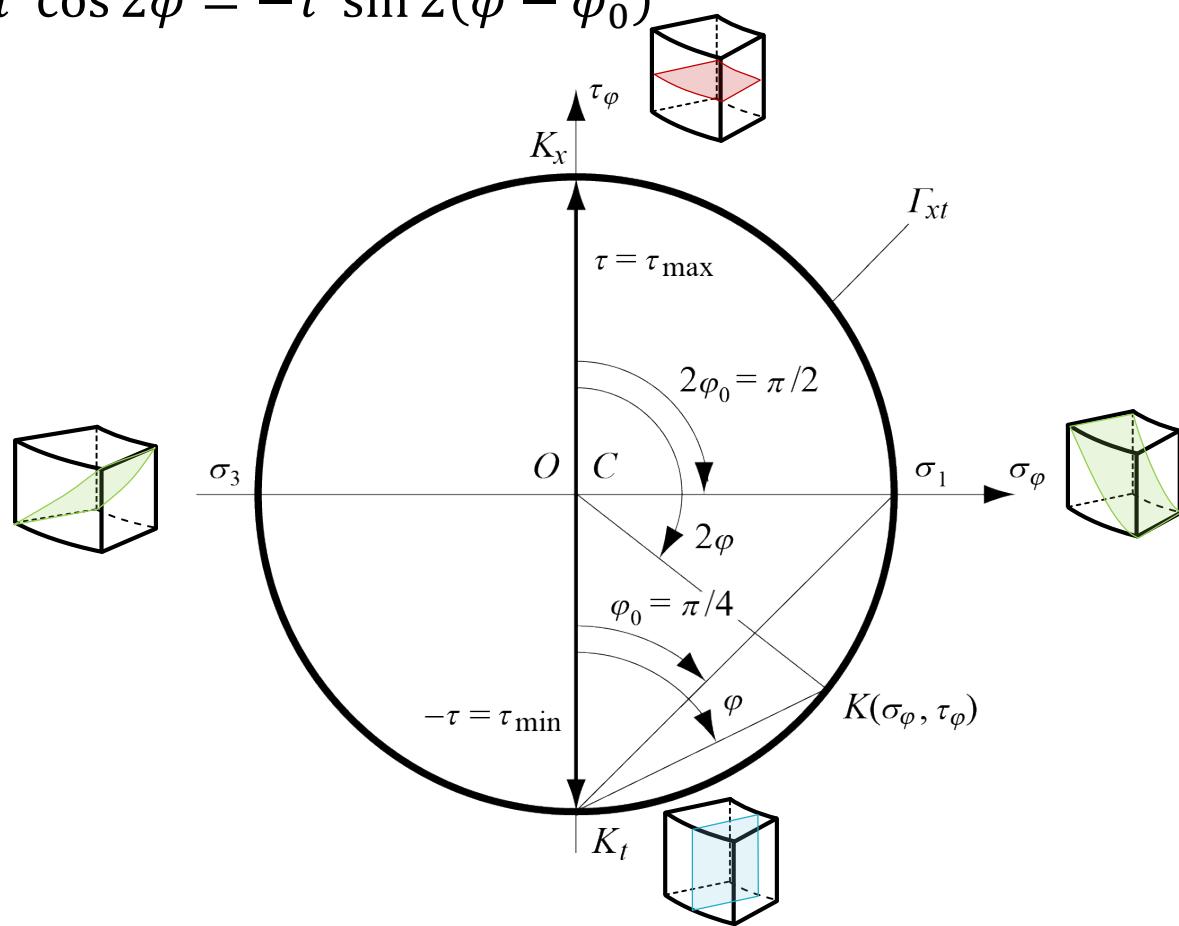
Chapitre 5 : Torsion simple

Analyse de l'état de contrainte en torsion circulaire

En vertu de la définition des faces $F_x = F_\varphi \cos \varphi$ et $F_t = F_\varphi \sin \varphi$, les relations précédentes deviennent (le déphasage φ_0 valant $\pi/4$)

- $\sigma_\varphi = 2\tau \sin \varphi \cos \varphi = \tau \sin 2\varphi = \tau \cos 2(\varphi - \varphi_0)$
- $\tau_\varphi = \tau(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \tau \cos 2\varphi = -\tau \sin 2(\varphi - \varphi_0)$

Cercle de Mohr fondamental
 Γ_{xt} en torsion circulaire

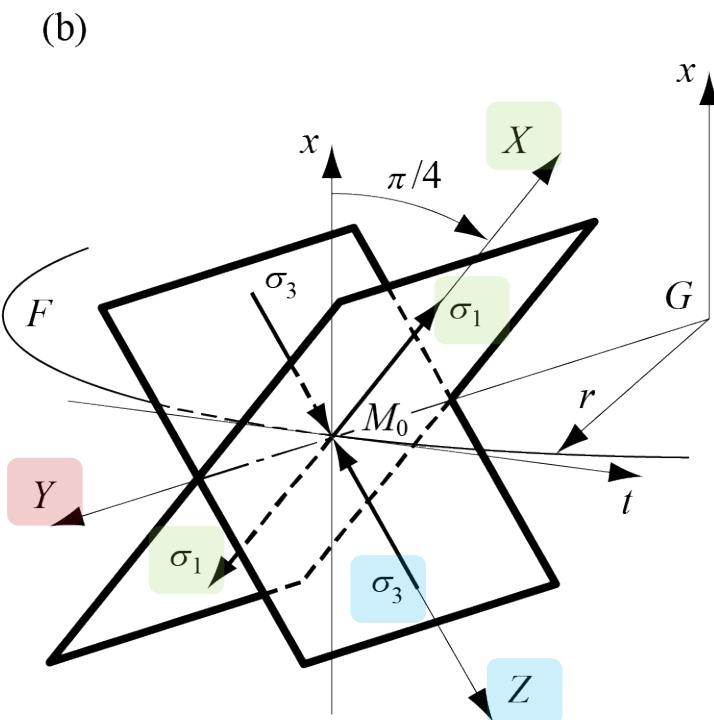
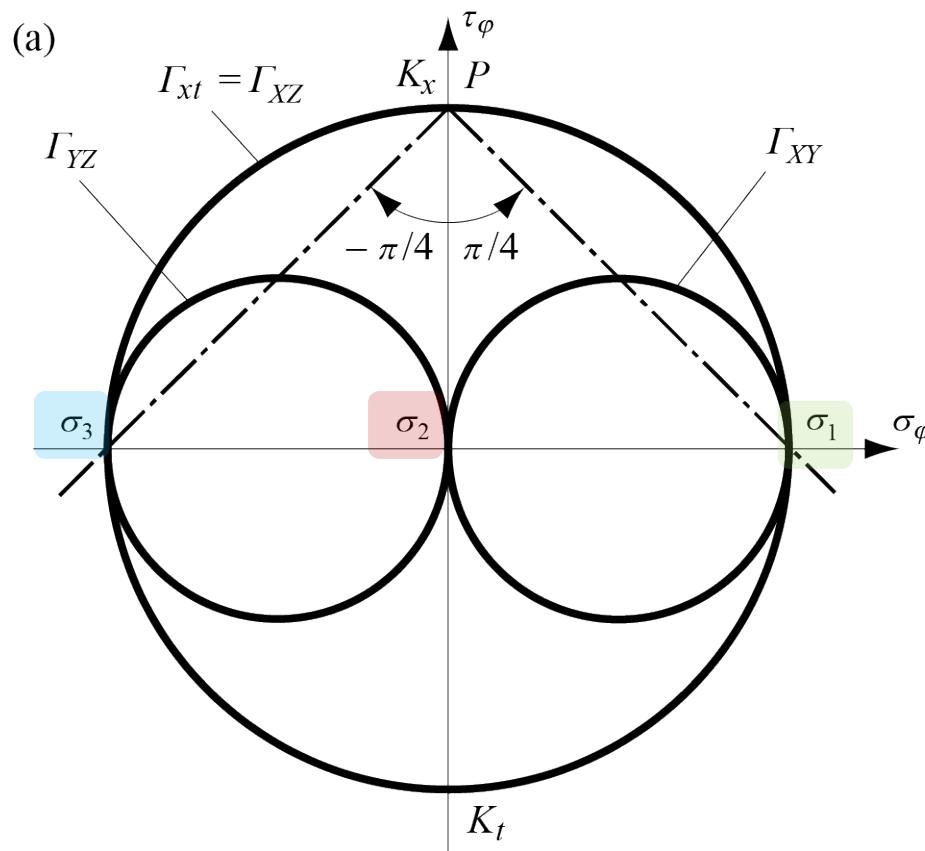




Chapitre 5 : Torsion simple

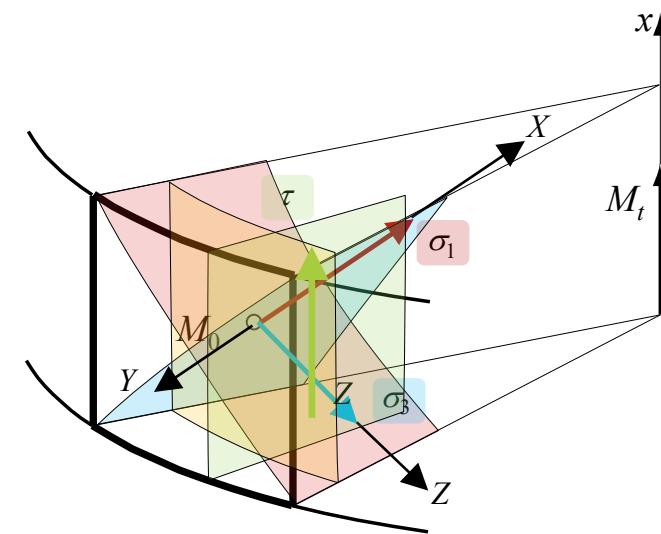
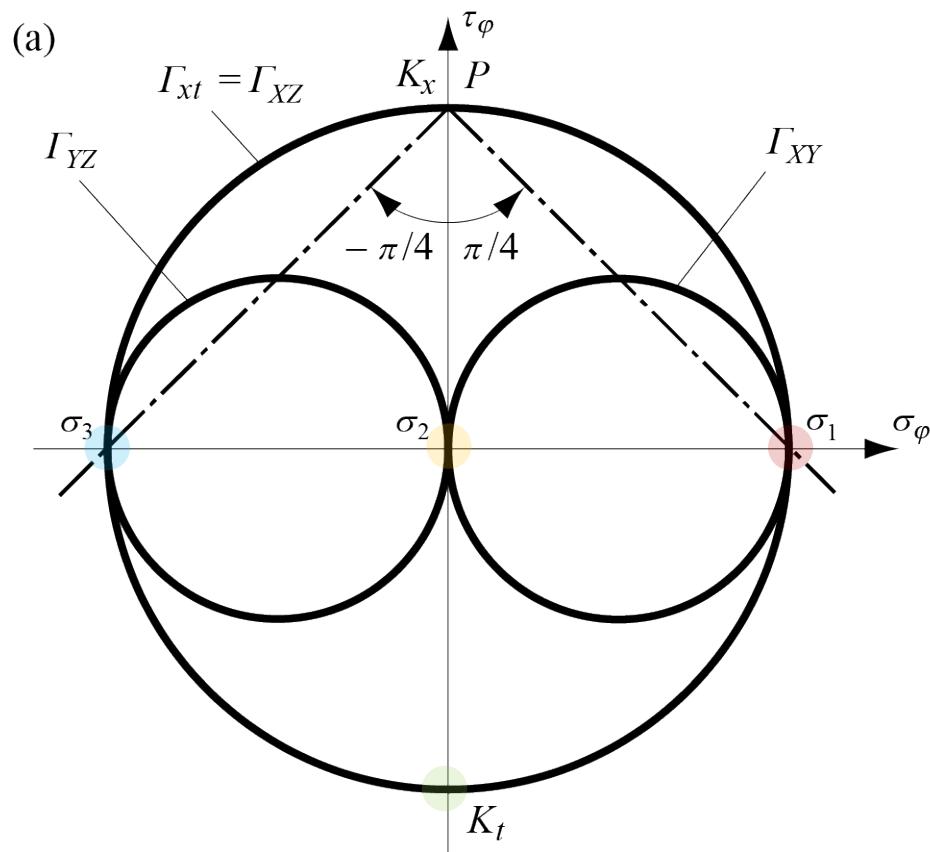
Analyse de l'état de contrainte en torsion circulaire

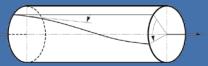
Torsion circulaire : (a) cercles de Mohr; (b) axes et plans principaux





Chapitre 5 : Torsion simple

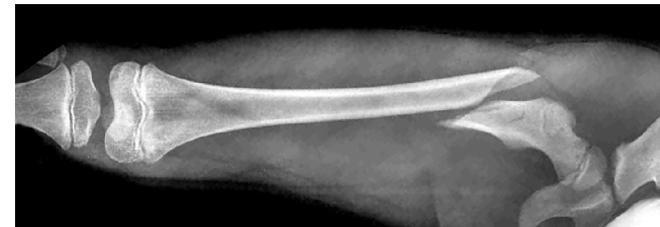
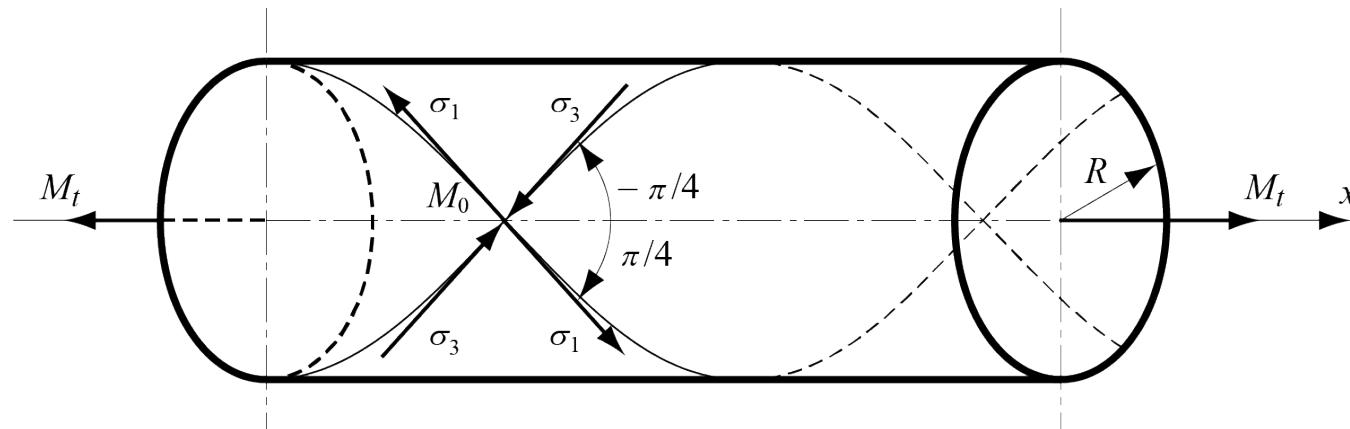


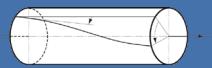


Chapitre 5 : Torsion simple

Ligne isostatique

A ce stade, il est intéressant d'observer les trajectoires des contraintes principales, c'est-à-dire les courbes de l'espace continuellement tangentes aux contraintes principales. Ces courbes, appelées *lignes isostatiques*, sont des hélices à 45° en torsion circulaire





Chapitre 5 : Torsion simple

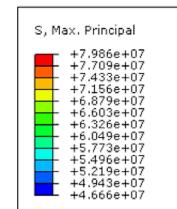
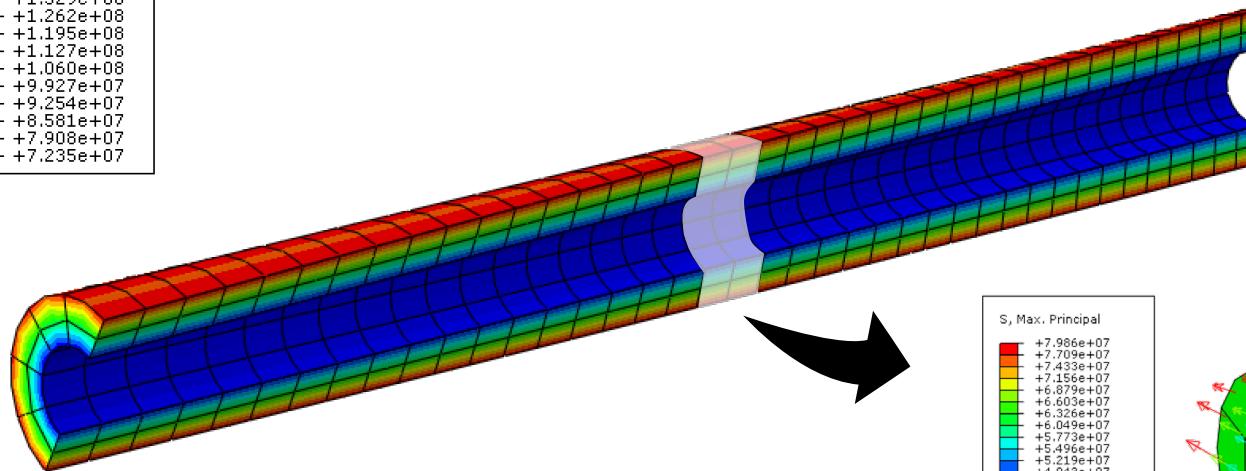
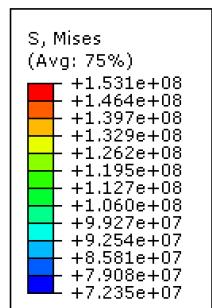
Simulation

Module élastique du fémur : 10-20 Gpa ($\sigma_{\max} = 50-100$ MPa)

Moment de force : 1000 Nm \equiv 100 kg à 1 m

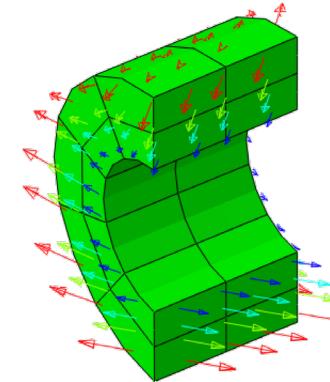
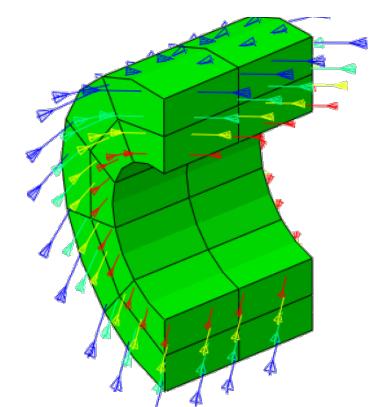
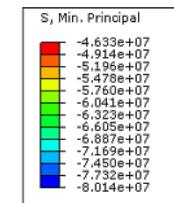
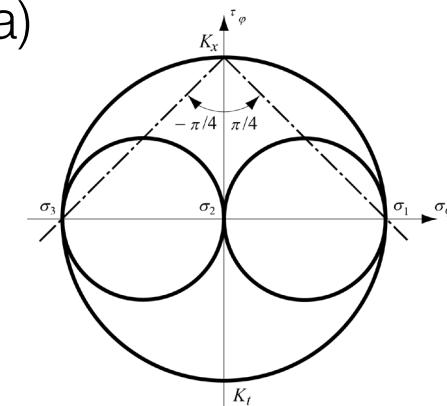
Résistance de l'os : 100 N/mm² ou 100 MPa

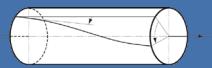
Rayon : $R = 20$ mm et $r = 10$ mm



- $\tau(r) = \frac{r M_t}{I_p} = \frac{2 r M_t}{\pi(R^4 - r^4)} \cong 42.4$ MPa

- $\tau(R) = \frac{R M_t}{I_p} = \frac{2 R M_t}{\pi(R^4 - r^4)} \cong 84.8$ MPa



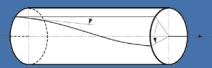


Chapitre 5 : Torsion simple

Variation de volume

L'état de contrainte étant bidimensionnel, la variation relative de volume au premier ordre peut être obtenue grâce à la formule dans laquelle σ_x et σ_y sont les contraintes principales non nulles $\sigma_1 = +\tau$ et $\sigma_3 = -\tau$

- $v = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{E} (1 - 2\mu) = \frac{\tau - \tau}{E} (1 - 2\mu) = 0$



Chapitre 5 : Torsion simple

Densité d'énergie

La densité d'énergie u de déformation spécifique d'un barreau soumis au cisaillement pour la torsion a pour valeur (voir énergie de cisaillement ch. 4)

- $$u = \frac{\tau^2}{2G} = \left(\frac{\tau}{\tau_{max}}\right)^2 \frac{\tau_{max}^2}{2G} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 u_{max}$$

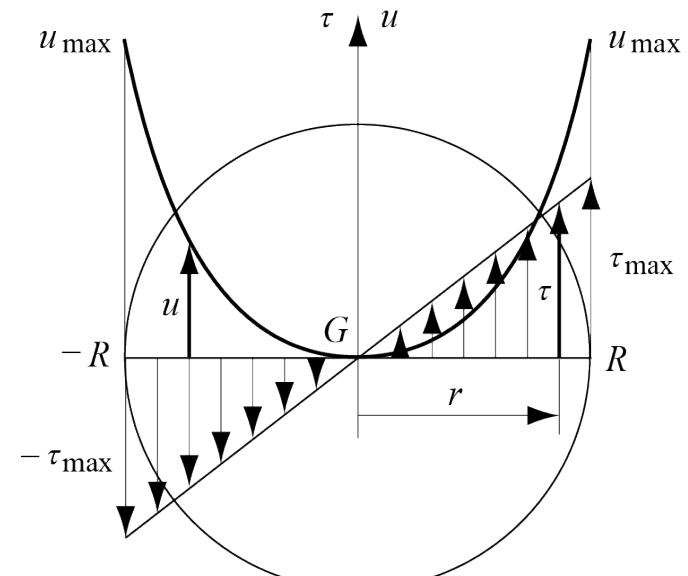
$$\begin{aligned}\tau &= k r = \frac{r M_t}{I_p} \\ \tau_{max} &= \tau(R) = \frac{R M_t}{I_p}\end{aligned}$$

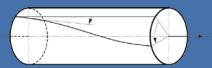
L'*énergie de déformation* dU comprise entre deux sections distantes de dx est égale au demi-produit du moment de torsion M_t par la rotation $d\varphi$ d'une des sections par rapport à l'autre

- $$dU = \frac{1}{2} M_t d\varphi = \frac{M_t^2}{2G I_p} dx$$

$$\text{L} \quad d\varphi = \frac{M_t}{G I_p} dx$$

- $$U = \int_0^\ell dU = \int_0^\ell \frac{M_t^2}{2G I_p} dx = \frac{M_t^2 \ell}{2G I_p}$$

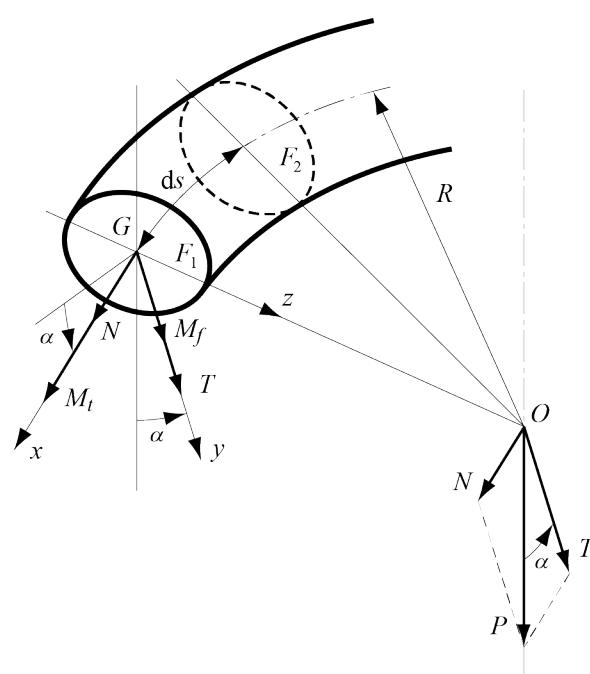
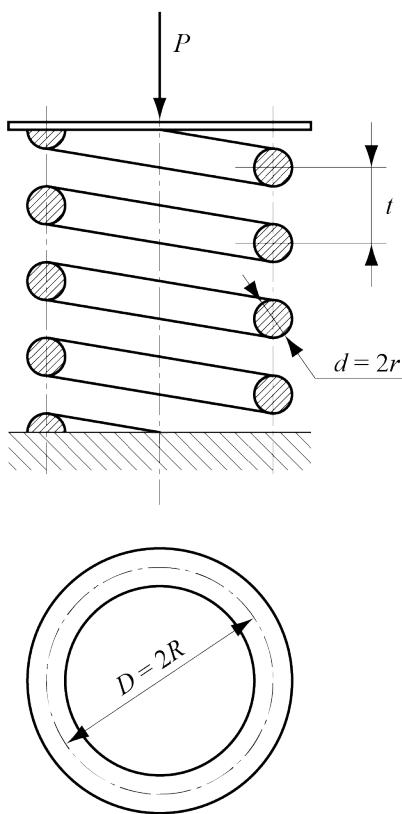




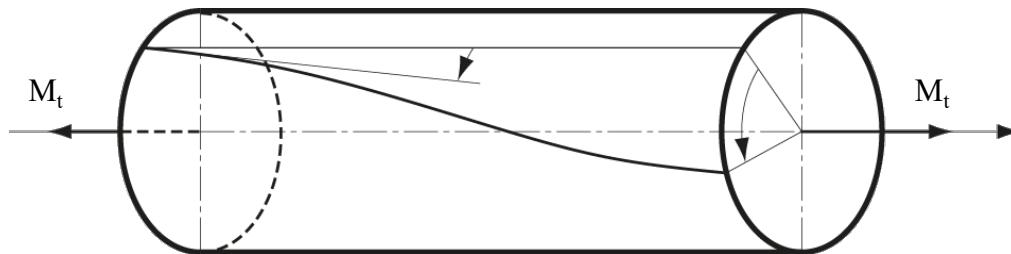
Chapitre 5 : Torsion simple

Problème 5.2

Calculer la contrainte de cisaillement maximum dans un ressort hélicoïdal de diamètre D , formé de n spires de diamètre d et soumis à une charge de compression P . Déterminer ensuite la flèche, la constante du ressort et l'énergie emmagasinée.



Mécanique des structures

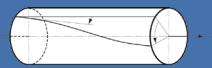


Chapitre 5 : Torsion simple

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL

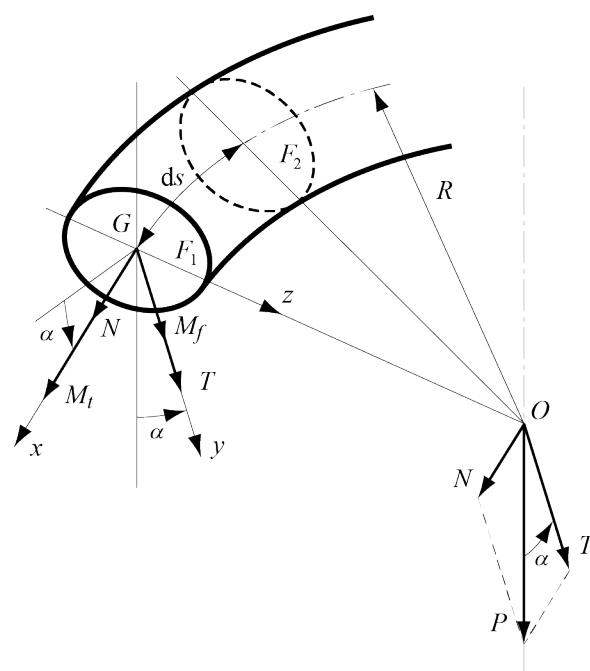
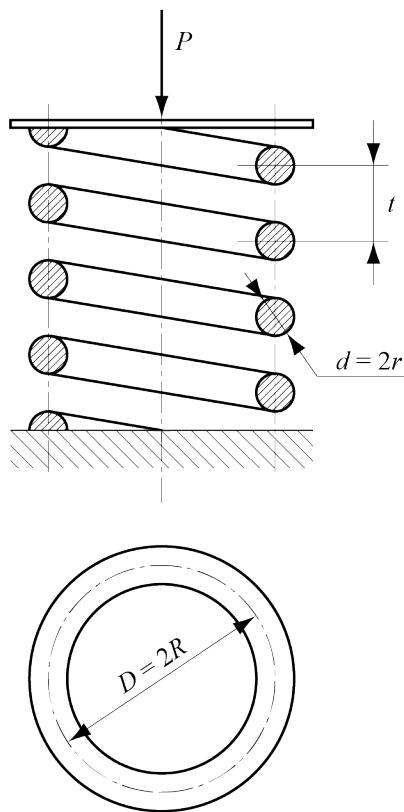




Chapitre 5 : Torsion simple

Problème 5.2

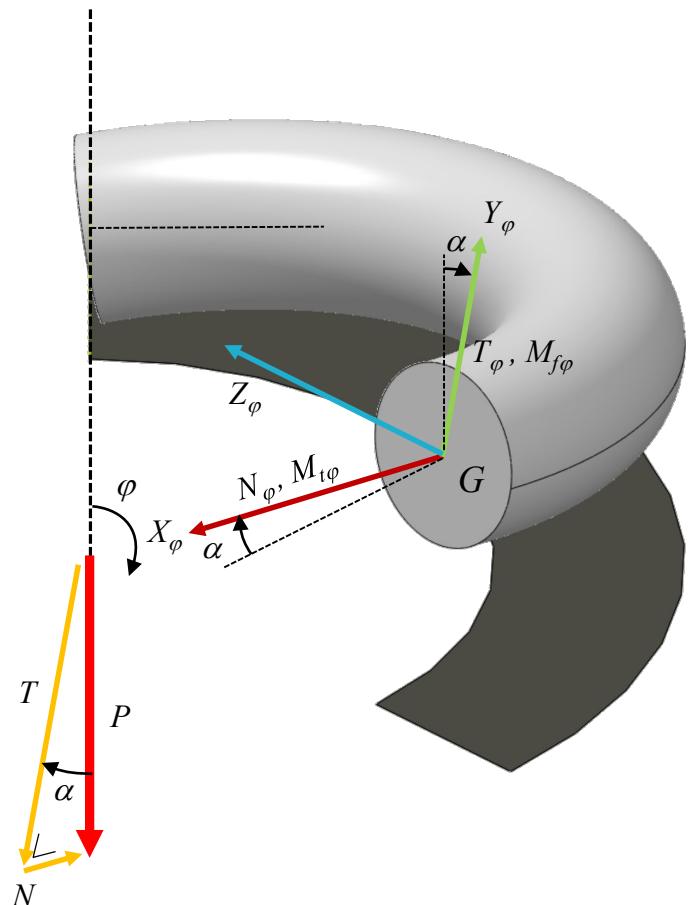
Calculer la contrainte de cisaillement maximum dans un ressort hélicoïdal de diamètre D , formé de n spires de diamètre d et soumis à une charge de compression P . Déterminer ensuite la flèche, la constante du ressort et l'énergie emmagasinée.





Chapitre 5 : Torsion simple

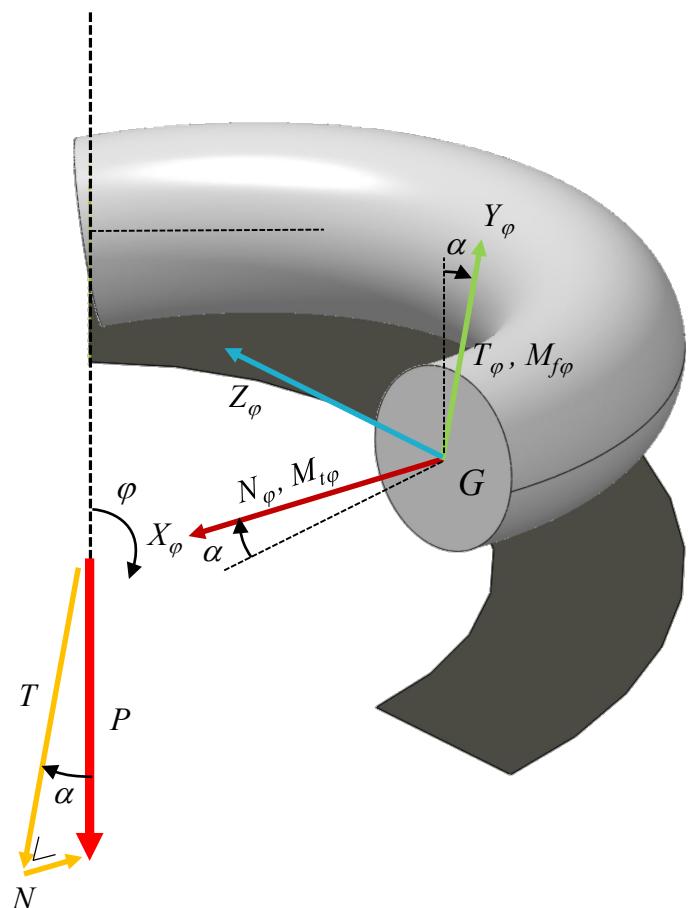
Problème 5.2

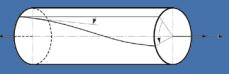




Chapitre 5 : Torsion simple

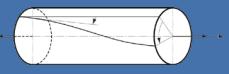
Problème 5.2





Chapitre 5 : Torsion simple

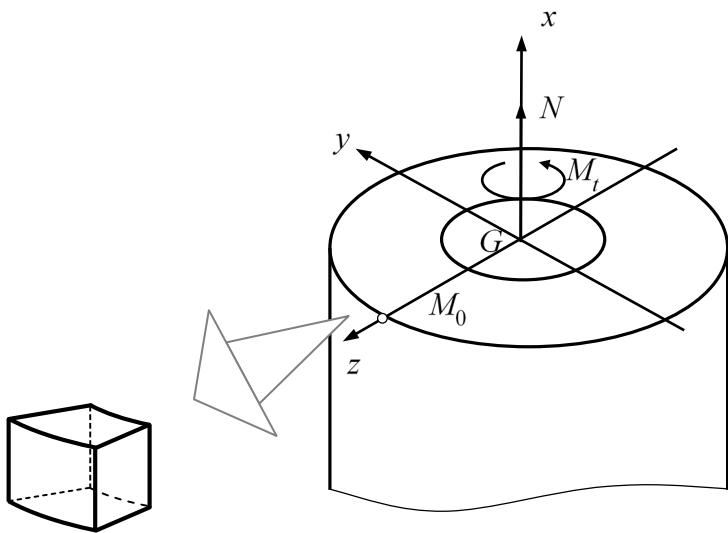
Problème 5.2



Chapitre 5 : Torsion simple

Problème 5.2

Exemple



Exemple

Annexe III Moment d'une aire plane

Moment du second ordre

Les *moments du second* ordre d'une aire plane F du plan Oxy , constitués du *moment d'inertie polaire* par rapport à l'origine O , des *moments d'inertie* par rapport aux axes Ox et Oy , ainsi que du *moment centrifuge*, sont définis par les expressions respectives

- $I_p = \iint_F r^2 dF$ [m⁴]
- $I_x = \iint_F y^2 dF$ [m⁴]
- $I_y = \iint_F x^2 dF$ [m⁴]
- $I_{xy} = \iint_F xy dF$ [m⁴]

où r dénote le module du vecteur-lieu \mathbf{r}

Il est à relever qu'en vertu de la liaison géométrique $r^2 = x^2 + y^2$, le moment d'inertie polaire I_p est lié aux moments d'inertie I_x et I_y par la relation : $I_p = I_x + I_y$



Annexe III Moment d'une aire plane

Moment du second ordre : surface rectangulaire

Le calcul par intégration du moment du second ordre d'un rectangle par rapport à l'axe x passant par le centre de gravité

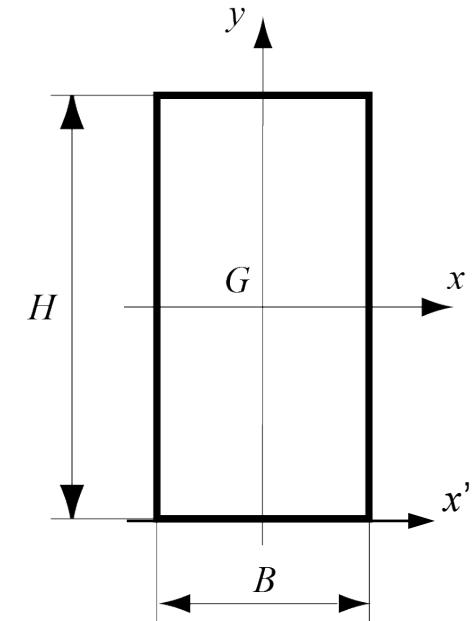
$$\bullet \quad I_x = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=-H/2}^{H/2} y^2 dF$$

$$= x \Big|_{-B/2}^{B/2} \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-H/2}^{H/2} = \frac{BH^3}{12}$$

$$\bullet \quad I_{x'} = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=0}^H y^2 dF = \frac{BH^3}{3}$$

Approche discrète

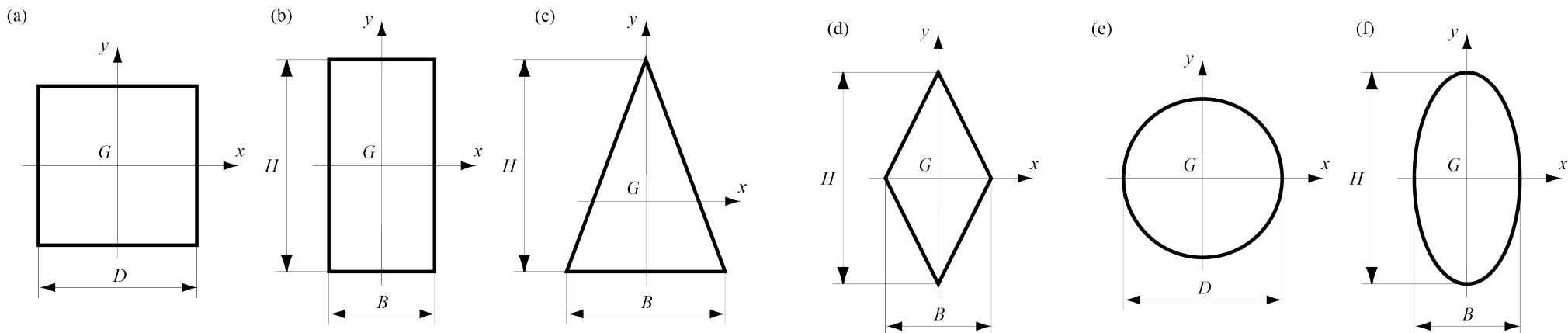
$$\bullet \quad I_{x'} = I_x + \sum y^2 F = \frac{BH^3}{12} + \frac{H^2}{4} BH = \frac{BH^3}{3}$$



Annexe III Moment d'une aire plane

Moment du second ordre

Forme de l'aire	I_p m^4	I_x m^4	I_y m^4	I_{xy} m^4
(a) Carré de côté D	$\frac{D^4}{6}$	$\frac{D^4}{12}$	$\frac{D^4}{12}$	0
(b) Rectangle de largeur B et hauteur H	$\frac{BH}{12}(B^2 + h^2)$	$\frac{BH^3}{12}$	$\frac{HB^3}{12}$	0
(c) Triangle isocèle de base B et hauteur H	$\frac{BH}{144}(3B^2 + 4h^2)$	$\frac{BH^3}{36}$	$\frac{HB^3}{48}$	0
(d) Losange de diamètres B et H	$\frac{BH}{48}(B^2 + h^2)$	$\frac{BH^3}{48}$	$\frac{HB^3}{48}$	0
(e) Cercle de diamètre D	$\frac{\pi D^4}{32}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	0
(f) Ellipse d'axes B et H	$\frac{\pi BH}{64}(B^2 + h^2)$	$\frac{\pi BH^3}{64}$	$\frac{\pi HB^3}{64}$	0



Annexe III Moment d'une aire plane

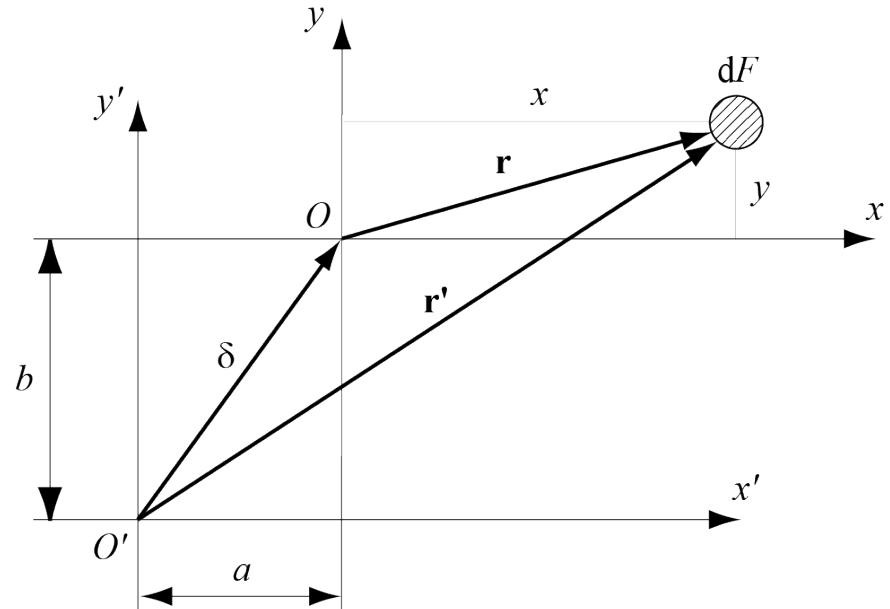
Effet de translation des axes de coordonnées

En considérant la translation

- $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta$
- $x' = x + a$
- $y' = y + b$

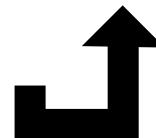
Par rapport au référentiel $O'x'y'$, les moments du second ordre ont pour expression

- $I_{p'} = \iint_F r'^2 dF = \iint_F [(x+a)^2 + (y+b)^2] dF = I_p + 2(aS_x + bS_y) + \delta^2 F$



Dans le cas particulier où le point O coïncide avec le centre de gravité G

- $I_{p'} = I_p + \delta^2 F$
- $I_{x'} = I_x + b^2 F$
- $I_{y'} = I_y + a^2 F$



Annexe III Moment d'une aire plane

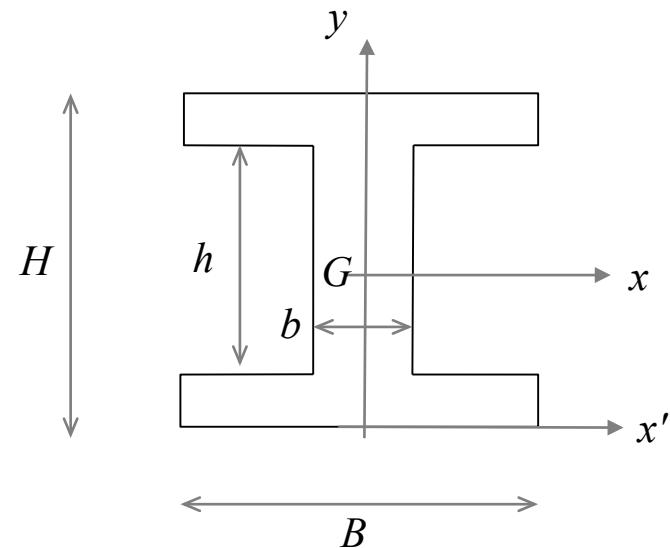
Moment du second ordre : poutre en I

Forme intégrale du moment statique et du moment d'inertie

$$\begin{aligned} \bullet \quad S_{x'} &= \int_{x'=-B/2}^{B/2} \int_{y=0}^H y \, dF - 2 \int_{b/2}^{B/2} \int_{(H-h)/2+h}^{(H-h)/2+h} y \, dF \\ &= \frac{B H^2}{2} - \frac{H h (B-b)}{2} \quad [\text{m}^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_x &= \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=-H/2}^{H/2} y^2 \, dF - 2 \int_{b/2}^{B/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dF \\ &= \frac{B H^3}{12} - \frac{h^3 (B-b)}{12} \quad [\text{m}^4] \end{aligned}$$

$$\bullet \quad I_{x'} = I_x + \sum y^2 F \quad [\text{m}^4]$$



$$I_p = I_x + I_y \quad [\text{m}^4]$$



Annexe III Moment d'une aire plane

Moment du second ordre : poutre en I

Calcul discret des moments statique et d'inertie (sommation des aires)

- $S_{x'} = \sum y F = \frac{H}{2} BH - \frac{H}{2} h(B - b)$

$$= \frac{B H^2}{2} - \frac{Hh(B-b)}{2} \text{ [m}^3\text{]}$$

- $I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{(B-b)h^3}{12}$

- $I_{x'} = I_x + \sum y^2 F \quad [\text{m}^4]$

- $I_y = \frac{B^3 H}{12} - \frac{h(B^3 - b^3)}{12}$



$$I_p = I_x + I_y \quad [\text{m}^4]$$

